Unidad IV Cadenas de Markov

UNI-NORTE

CARRERAS ING. DE SISTEMAS E INDUSTRIAL

I semestre 2009

Maestro
Ing. Julio Rito Vargas Avilés.

Sumario

- Procesos estocásticos
- Concepto de cadena de Markov
- Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov
- Clasificación de estados
- Cadenas absorbentes
- Distribución estacionaria

Procesos estocásticos

Procesos estocásticos

- Un sistema informático complejo se caracteriza por demandas de carácter aleatorio y por ser dinámico
- Necesitamos una herramienta que modele procesos aleatorios en el tiempo, y para ello usaremos los *procesos estocásticos*
- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo

Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias definida sobre un espacio de probabilidad. Es decir:

$$\left\{X_t : \Omega \rightarrow \Re, \quad t \in T\right\}$$

$$\omega \rightarrow X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

Procesos estocásticos

- Tendremos que *X* es una función de dos argumentos. Fijado $\omega=\omega_0$, obtenemos una función determinista (no aleatoria):

$$X\left(\cdot,\omega_0\right):T\rightarrow\Re$$

$$t\rightarrow X\left(t,\omega_0\right)$$

Procesos estocásticos

- Asimismo, fijado $t=t_0$, obtenemos una de las variables aleatorias de la familia:

$$X(t_0,\cdot):\Omega \rightarrow \Re$$

$$\omega \rightarrow X(t_0,\omega)$$

Procesos estocásticos

- El espacio de estados S de un proceso estocástico es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar dicho proceso:

$$S = \{X_t(\omega) \mid t \in T \wedge \omega \in \Omega\}$$

Ejemplo de proceso estocástico

- Lanzamos una moneda al aire 6 veces. El jugador gana 1 € cada vez que sale cara (C), y pierde 1 € cada vez que sale cruz (F).
- X_i = estado de cuentas del jugador después de la *i*-ésima jugada
- La familia de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ constituye un proceso estocástico

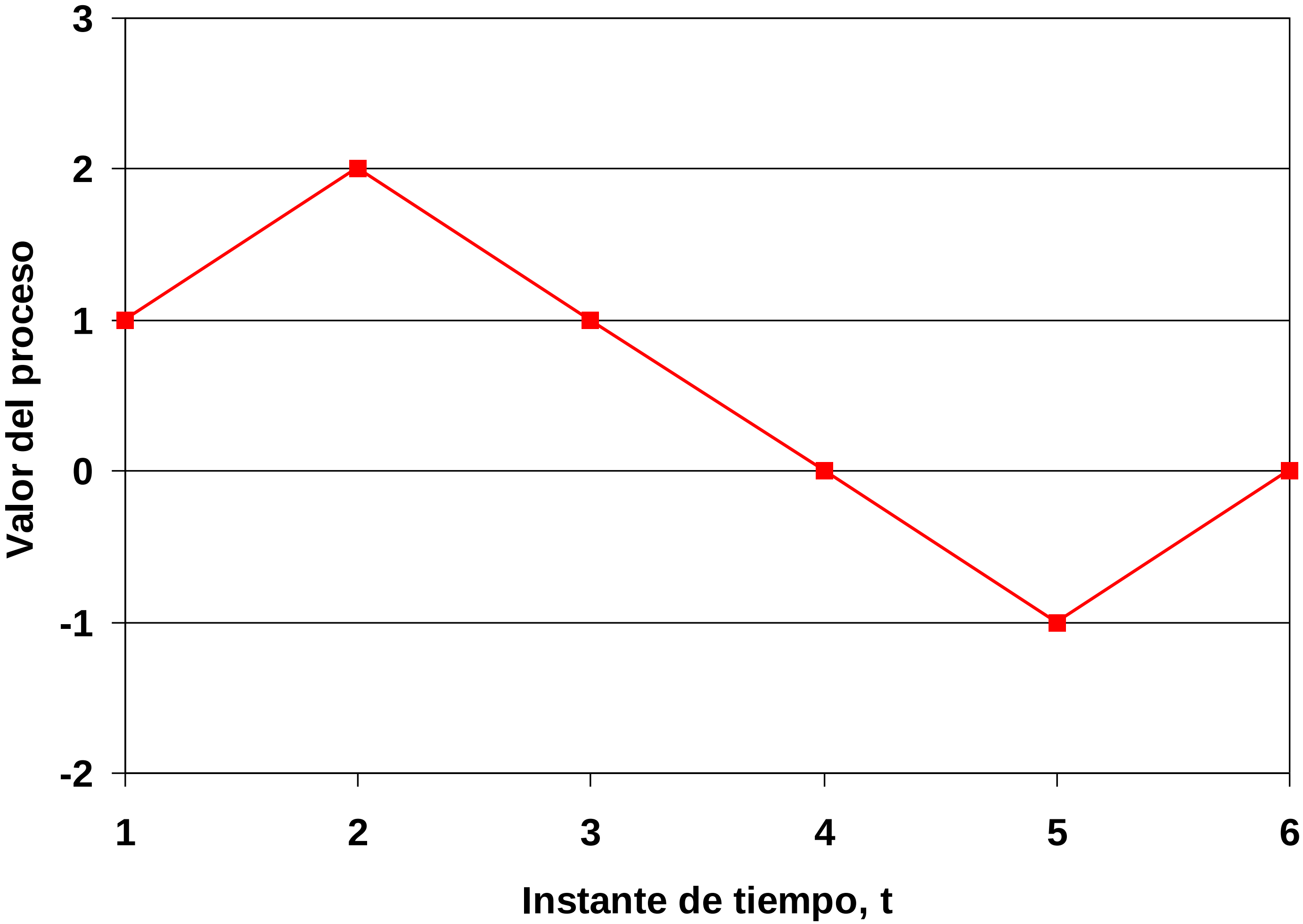
Ejemplo de proceso estocástico

- Ω={CCCCCC,CCCCCF,…}
- card(Ω) = $2^6 = 64$
- $P(\omega)=1/64 \quad \forall\ \omega \in \Omega$
- T={1, 2, 3, 4, 5, 6}
- S={–6, –5, …, –1, 0, 1, 2, …, 5, 6}
- $X_1(\Omega)=\{-1, 1\}$
- $X_2(\Omega)=\{-2, 0, 2\}$
- $X_3(\Omega)=\{-3,-1\ 1, 3\}$

Ejemplo de proceso estocástico

- Si fijo ω, por ejemplo ω_0=CCFFFC, obtengo una secuencia de valores completamente determinista:
- $X_1(\omega_0)=1$, $X_2(\omega_0)=2$, $X_3(\omega_0)=1$, $X_4(\omega_0)=0$, $X_5(\omega_0)=-1$, $X_6(\omega_0)=0$
- Puedo dibujar con estos valores la *trayectoria del proceso*:

Ejemplo de proceso estocástico



Ejemplo de proceso estocástico

- Si fijo t, por ejemplo $t_0=3$, obtengo una de las variables aleatorias del proceso:

$$X_3 : \Omega \to \Re$$

$$\omega \to X_3(\omega)$$

- Los posibles valores que puede tomar el proceso en $t_0=3$ son: $X_3(\Omega)=\{-3, -1, 1, 3\}$

Ejemplo de proceso estocástico

- Podemos hallar la probabilidad de que el proceso tome uno de estos valores:

$$P[X_3(\omega)=1]=P[CFC]+P[CCF]+P[FCC]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=3]=P[CCC]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-1]=P[FCF]+P[FFC]+P[CFF]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-3]=P[FFF]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Clasificación de los procesos estocásticos

	S discreto	**S continuo**
T discreto	Cadena	Sucesión de variables aleatorias continuas
T continuo	Proceso puntual	Proceso continuo

Ejemplos de los tipos de procesos estocásticos

- Cadena: Ejemplo anterior
- Sucesión de variables aleatorias continuas: cantidad de lluvia caída cada mes
- Proceso puntual: Número de clientes esperando en la cola de un supermercado
- Proceso continuo: velocidad del viento

Concepto de cadena de Markov

En honor al matemático ruso
Andrei Andreyevich Markov,

Cadenas de Markov

- Las cadenas de Markov y los procesos de Markov son un tipo especial de procesos estocásticos que poseen la siguiente propiedad:

- **Propiedad de Markov:** Conocido el estado del proceso en un momento dado, su comportamiento futuro no depende del pasado. **Dicho de otro modo, “dado el presente, el futuro es independiente del pasado”**

Cadenas de Markov

- Sólo estudiaremos las cadenas de Markov, con lo cual tendremos espacios de estados S discretos y conjuntos de instantes de tiempo T también discretos, T={t_0, t_1, t_2,…}
- Una cadena de Markov (CM) es una sucesión de variables aleatorias X_i, $i \in \mathbf{N}$, tal que:

$$P\left[X_{t+1} = j \big/ X_0, X_1, \ldots, X_t \right] = P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t \right]$$

que es la expresión algebraica de la propiedad de Markov para T discreto.

Probabilidades de transición

- Las CM están completamente caracterizadas por las probabilidades de transición en una etapa,

$$P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t = i \right], \quad i, j \in S, t \in T$$

- Sólo trabajaremos con CM homogéneas en el tiempo, que son aquellas en las que

$$\forall i, j \in S \ \forall t \in T, P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t = i \right] = q_{ij}$$

donde q_{ij} se llama probabilidad de transición en una etapa desde el estado i hasta el estado j

Matriz de transición

- Los q_{ij} se agrupan en la denominada matriz de transición de la CM:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \left(q_{ij}\right)_{i,j \in S}$$

Propiedades de la matriz de transición

- Por ser los q_{ij} probabilidades,

$$\forall i, j \in S, \quad q_{ij} \in [0,1]$$

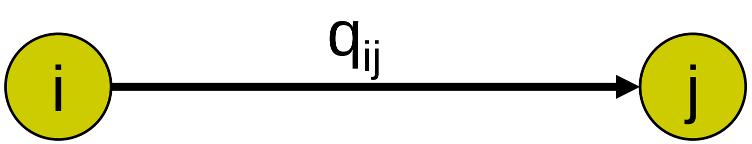
- Por ser 1 la probabilidad del suceso seguro, cada fila ha de sumar 1, es decir,

$$\forall i \in S, \quad \sum_{j \in S} q_{ij} = 1$$

- Una matriz que cumpla estas dos propiedades se llama matriz estocástica

Diagrama de transición de estados

- El diagrama de transición de estados (DTE) de una CM es un grafo dirigido cuyos nodos son los estados de la CM y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es nula, no se pone arco.

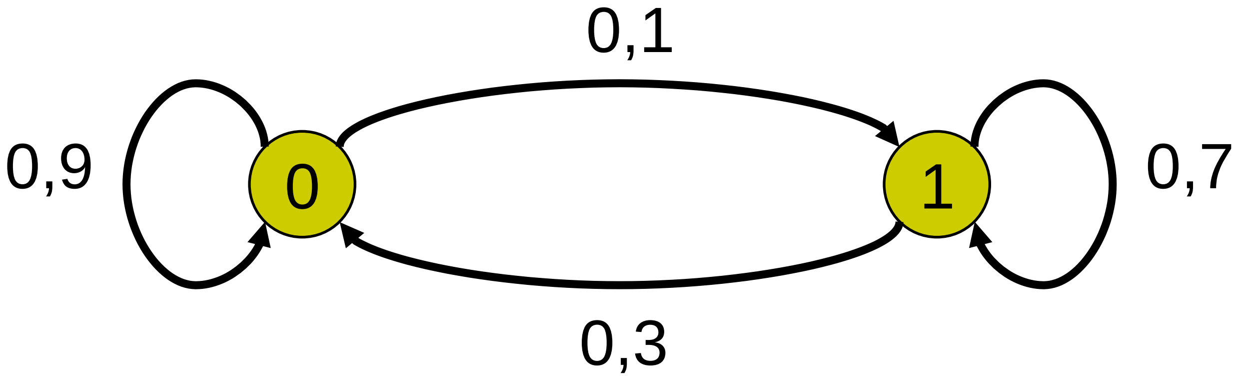


Ejemplo: línea telefónica

- Sea una línea telefónica de estados ocupado=1 y desocupado=0. Si en el instante t está desocupada, en el instante t+1 estará ocupada con probabilidad 0,7 y desocupada con probabilidad 0,3. Si en el instante t está desocupada, en el t+1 estará ocupada con probabilidad 0,1 y desocupada con probabilidad 0,9.

Ejemplo: línea telefónica

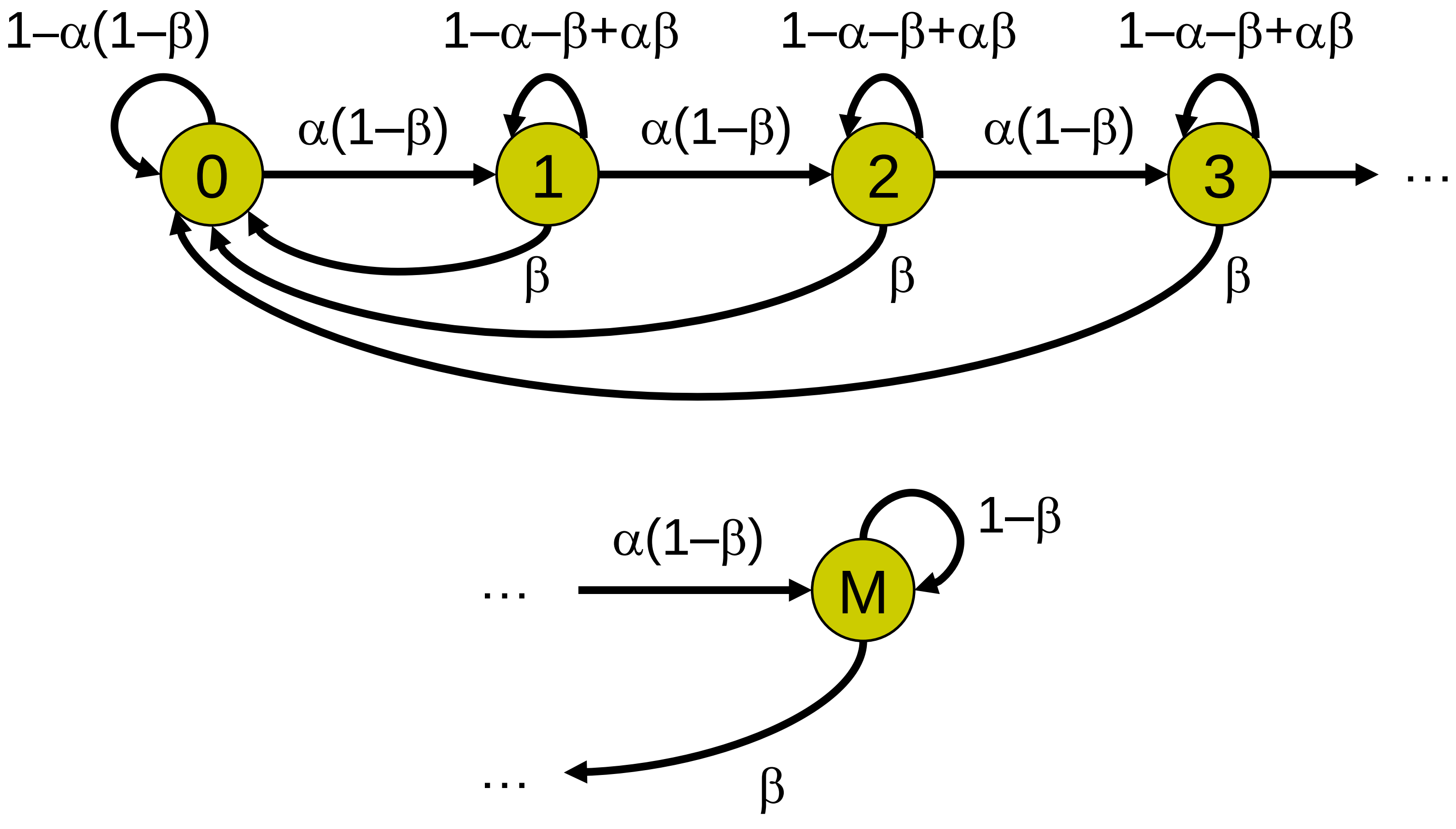
$$Q = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$



Ejemplo: *buffer* de E/S

- Supongamos que un *buffer* de E/S tiene espacio para M paquetes. En cualquier instante de tiempo podemos insertar un paquete en el *buffer* con probabilidad α o bien el *buffer* puede vaciarse con probabilidad β. Si ambos casos se dan en el mismo instante, primero se inserta y luego se vacía.
- Sea X_t=nº de paquetes en el *buffer* en el instante t. Suponiendo que las inserciones y vaciados son independientes entre sí e independientes de la historia pasada, $\{ X_t \}$ es una CM, donde S={0, 1, 2, …, M}

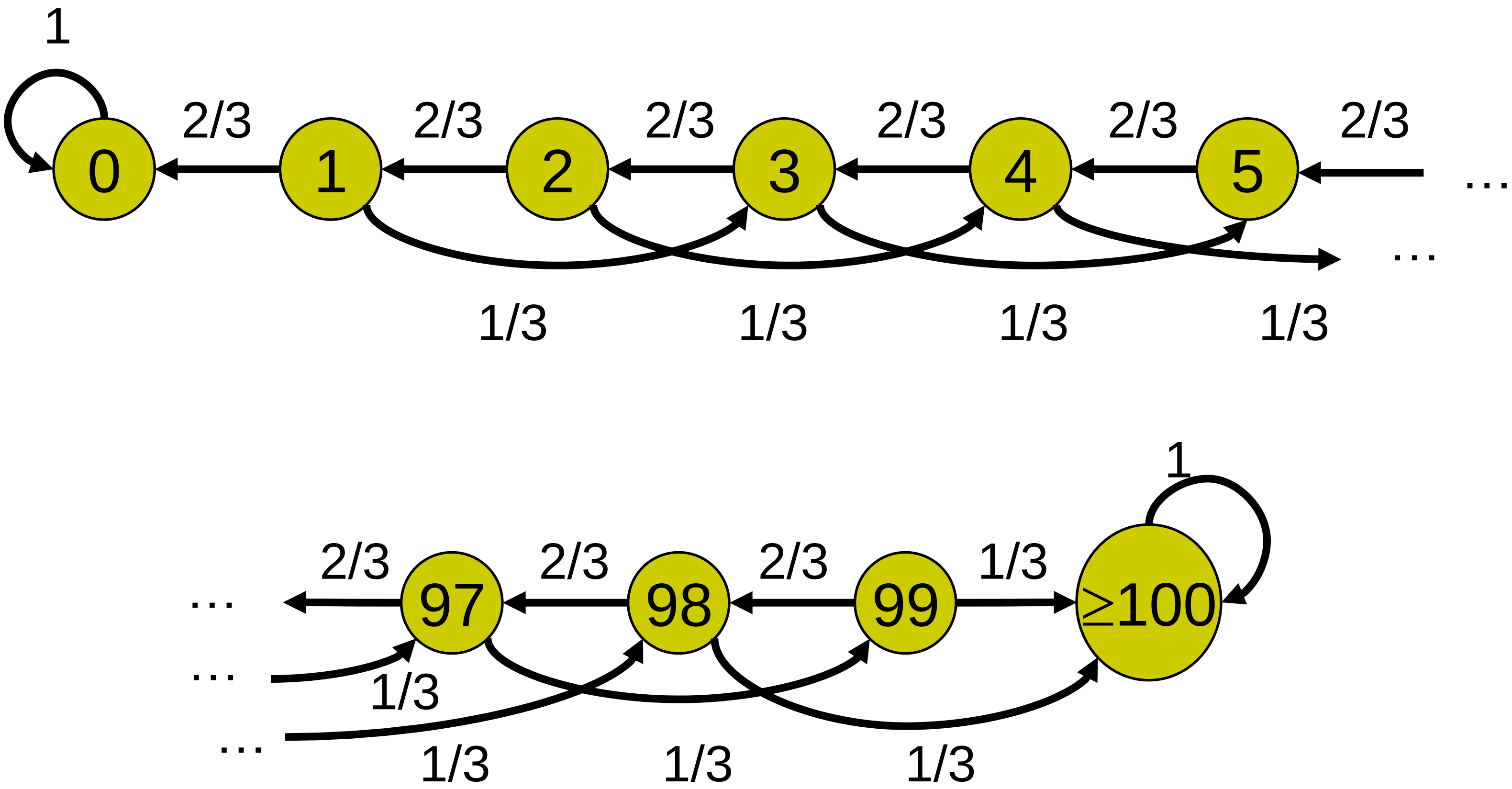
Ejemplo: *buffer* de E/S



Ejemplo: Lanzamiento de un dado

- Se lanza un dado repetidas veces. Cada vez que sale menor que 5 se pierde 1 €, y cada vez que sale 5 ó 6 se gana 1 €. El juego acaba cuando se tienen 0 € ó 100 €.
- Sea X_t=estado de cuentas en el instante t. Tenemos que $\{ X_t \}$ es una CM
- S={0, 1, 2, …, 100}

Ejemplo: Lanzamiento de un dado



Ejemplo: organismos unicelulares

- Se tiene una población de organismos unicelulares que evoluciona así: cada organismo se duplica con probabilidad 1–p o muere con probabilidad p. Sea X_n el nº de organismos en el instante n. La CM $\{ X_n \}$ tendrá S = { 0, 1, 2, 3, … } = **N**
- Si hay i organismos en el instante n, en el instante n+1 tendremos k organismos que se dupliquen e i–k que mueran, con lo que habrá 2k organismos.

Ejemplo: organismos unicelulares

- Mediante la distribución binomial podemos hallar las probabilidades de transición $q_{i,2k}$ (el resto de probabilidades son nulas):

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,i\}, \quad q_{i,2k} = \binom{i}{k}(1-p)^k p^{i-k}$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

- **Teorema:** Las probabilidades de transición en n pasos vienen dadas por la matriz $p^{(n)}$:

$$\forall i, j \in S, P\left[X_{t+n} = j \middle/ X_t = i\right] = p_{ij}^{(n)} \quad = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$$

- **Para toda i=0,1,2,…M**
- **j=0,1,….M y cualquier m=1,2,…n-1**
- **y cualquier n=m+1, m+2,…**
- **Demostración:** Por inducción sobre n
  - Caso base (n=1). Se sigue de la definición de q_{ij}

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

- Hipótesis de inducción. Para cierto n, suponemos cierta la conclusión del teorema.
- Paso inductivo (n+1). Para cualesquiera i,j$\in$S,

$$P\left[X_{t+n+1}=j \middle/ X_t=i\right]=\sum_{k\in S}P\left[\left(X_{t+n}=k\right)\wedge\left(X_{t+n+1}=j\right) \middle/ X_t=i\right]=$$

$$=\sum_{k\in S}P\left[X_{t+n}=k \middle/ X_t=i\right]P\left[X_{t+n+1}=j \middle/ X_{t+n}=k\right]=\{H.I.\}=$$

$$=\sum_{k\in S}q_{ik}^{(n)}P\left[X_{t+n+1}=j \middle/ X_{t+n}=k\right]=\sum_{k\in S}q_{ik}^{(n)}q_{kj}=q_{ij}^{(n+1)}$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

- Por este teorema sabemos que la probabilidad de transitar de i hasta j en n pasos es el elemento (i,j) de Q^n. Para evitar computaciones de potencias elevadas de matrices, se intenta averiguar el comportamiento del sistema en el límite cuando $n \rightarrow \infty$, llamado también comportamiento a largo plazo
- A continuación estudiaremos esta cuestión

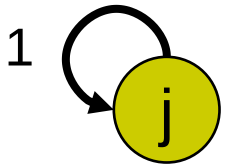
Clasificación de estados

Clasificación de estados

- **Probabilidad de alcanzar un estado**:

$$\forall i, j \in S, \quad \nu_{ij} = P\left[X_n = j \text{ para algún } n > 0 \middle/ X_0 = i \right]$$

- Diremos que un estado $j \in S$ es alcanzable desde el estado $i \in S$ sii $\nu_{ij} \neq 0$. Esto significa que existe una sucesión de arcos (camino) en el DTE que van desde i hasta j.
- Un estado $j \in S$ es absorbente sii $q_{jj}=1$. En el DTE,



Subconjuntos cerrados

- Sea $C \subseteq S$, con $C \neq \emptyset$. Diremos que C es cerrado sii $\forall i \in C$ $\forall j \notin C$, j no es alcanzable desde i, o lo que es lo mismo, $\nu_{ij}=0$. En particular, si $C=\{i\}$, entonces i es absorbente. S siempre es cerrado.
- Un subconjunto cerrado $C \subseteq S$ se dice que es irreducible sii no contiene ningún subconjunto propio cerrado

Estados recurrentes y transitorios

- Si S es irreducible, se dice que la CM es irreducible. En el DTE, esto ocurre sii dados i,j cualesquiera, j es alcanzable desde i
- Diremos que un estado $j \in S$ es recurrente sii $\nu_{jj}=1$. En otro caso diremos que j es transitorio. Se demuestra que una CM sólo puede pasar por un estado transitorio como máximo una cantidad finita de veces. En cambio, si visitamos un estado recurrente, entonces lo visitaremos infinitas veces.

Estados recurrentes y transitorios

- **Proposición:** Sea $C \subseteq S$ cerrado, irreducible y finito. Entonces $\forall i \in C$, i es recurrente
- **Ejemplos:** La CM de la línea telefónica es irreducible. Como además es finita, todos los estados serán recurrentes. Lo mismo ocurre con el ejemplo del *buffer*
- **Ejemplo:** En el lanzamiento del dado, tenemos los subconjuntos cerrados $\{0\}$, $\{\geq 100\}$, con lo que la CM no es irreducible. Los estados 0 y ≥ 100 son absorbentes, y el resto son transitorios

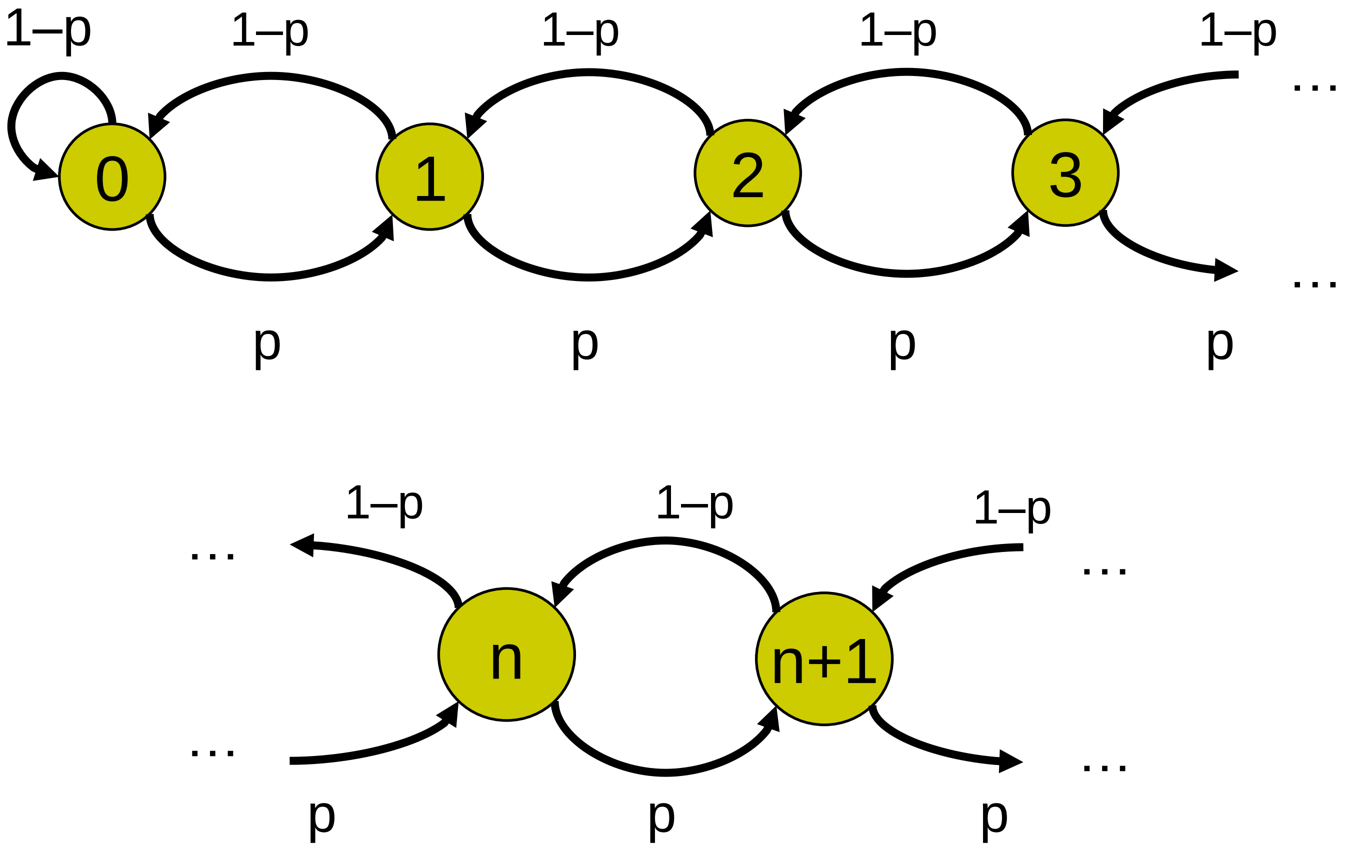
Estados recurrentes y transitorios

- **Proposición:** Sea $i \in S$ recurrente, y sea $j \in S$ un estado alcanzable desde i. Entonces j es recurrente.
- **Demostración:** Por reducción al absurdo, supongamos que j es transitorio. En tal caso, existe un camino A que sale de j y nunca más vuelve. Por ser j alcanzable desde i, existe un camino B que va desde i hasta j. Concatenando el camino B con el A, obtengo el camino BA que sale de i y nunca más vuelve. Entonces i es transitorio, lo cual es absurdo porque contradice una hipótesis.

Cadenas recurrentes y transitorias

- **Proposición:** Sea X una CM irreducible. Entonces, o bien todos sus estados son recurrentes (y decimos que X es recurrente), o bien todos sus estados son transitorios (y decimos que X es transitoria).
- **Ejemplo:** Estado de cuentas con un tío rico (*fortunes with the rich uncle*). Probabilidad p de ganar 1 € y 1–p de perder 1 €. Cuando me arruino, mi tío me presta dinero para la próxima tirada:

Cadenas recurrentes y transitorias



Cadenas recurrentes y transitorias

- Esta cadena es irreducible e infinita. Se demuestra que es transitoria sii $p>0{,}5$ y recurrente en otro caso ($p\leq 0{,}5$)
- La cadena es transitoria cuando la “tendencia global” es ir ganando dinero. Esto implica que una vez visitado un estado, al final dejaremos de visitarlo porque tendremos más dinero.

Periodicidad

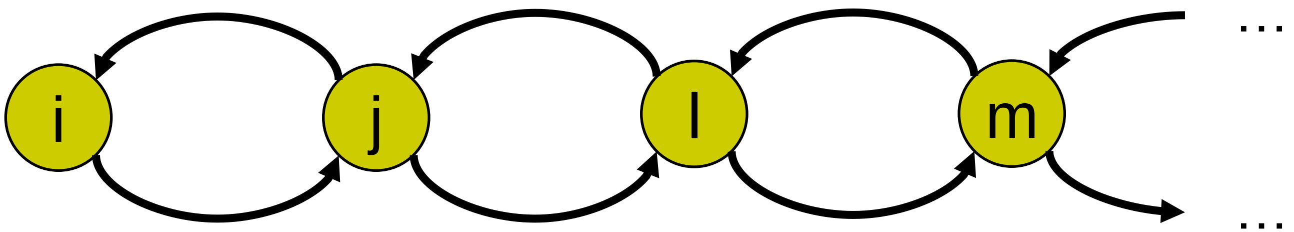
- Sea j$\in$S tal que ν_{jj}>0. Sea

$$k = mcd\ \{n \in \mathbf{N} - \{0\} \mid q_{jj}^{(n)} > 0\}$$

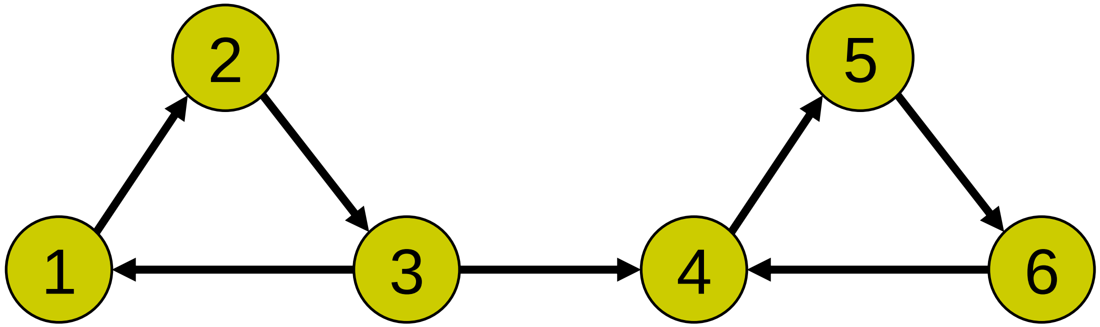
Si k>1, entonces diremos que j es periódico de periodo k. El estado j será periódico de periodo k>1 sii existen caminos que llevan desde j hasta j pero todos tienen longitud mk, con m>0

Periodicidad

- **Ejemplo:** En la siguiente CM todos los estados son periódicos de periodo k=2:



- **Ejemplo:** En la siguiente CM todos los estados son periódicos de periodo k=3:

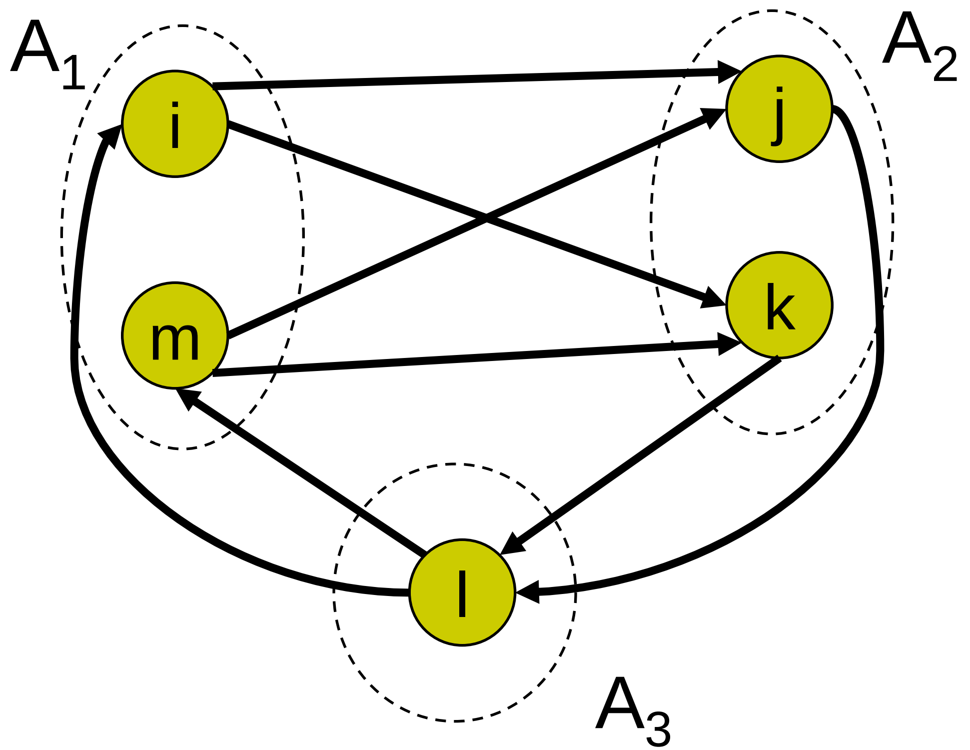


Periodicidad

- **Proposición:** Sea *X* una CM irreducible. Entonces, o bien todos los estados son periódicos de periodo k (y decimos que *X* es periódica de periodo k), o bien ningún estado es periódico (y decimos que *X* es aperiódica)
- En toda CM periódica de periodo k, existe una partición Π de S, $\Pi=\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, de tal manera que todas las transiciones van desde A_i hasta $A_{(i \bmod k)+1}$

Periodicidad

- Ejemplo de CM periódica de periodo k=3:



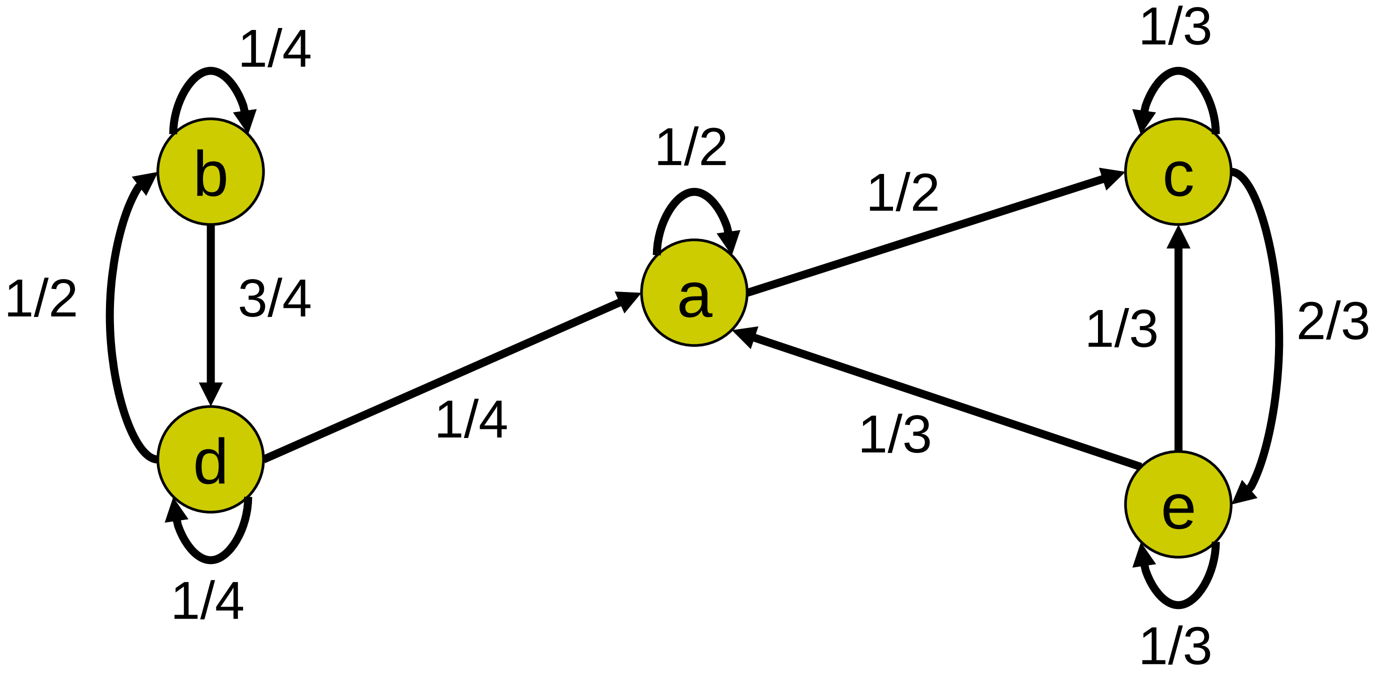
Cadenas ergódicas

- Sea X una CM finita. Diremos que X es ergódica sii es irreducible, recurrente y aperiódica
- **Ejemplo:** Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e}:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

- 1º Dibujar el DTE:



Ejemplos

- 2º Hallar los conjuntos cerrados
  - Tomado un estado i, construimos un conjunto cerrado C_i con todos los alcanzables desde él en una o más etapas (el propio i también se pone):
  - $C_a=\{a, c, e\}=C_c=C_e$
  - $C_b=\{b, d, a, c, e\}=C_d=S$
  - La CM no será irreducible, ya que C_a es un subconjunto propio cerrado de S

Ejemplos

- 3º Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, e
  - Transitorios: b, d
  - Periódicos: ninguno
  - Absorbentes: ninguno
- 4º Reorganizar Q. Dada una CM finita, siempre podemos agrupar los estados recurrentes por un lado y los transitorios por otro, y hacer:

$$Q = \left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} Movimientos\ entre \\ recurrentes \end{matrix} & 0 \\ \hdashline \begin{matrix} Paso\ de\ transitorios \\ a\ recurrentes \end{matrix} & \begin{matrix} Movimientos\ entre \\ transitorios \end{matrix} \end{array} \right)$$

Ejemplos

En nuestro caso, la nueva ordenación de S es S={a, c, e, b, d}, con lo que obtenemos:

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

- 5º Clasificar la cadena. No es irreducible, con lo cual no será periódica, ni aperiódica, ni recurrente, ni transitoria ni ergódica.

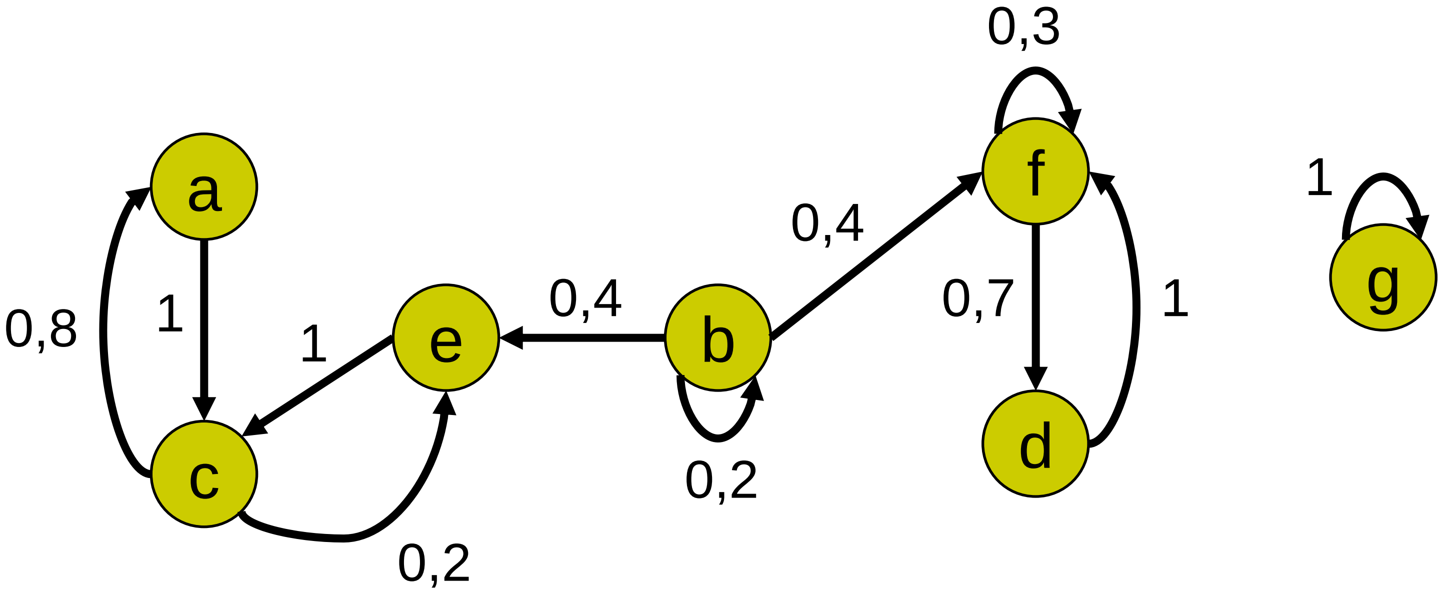
Ejemplos

- **Ejemplo:** Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e, f, g}:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

- 1º Dibujar el DTE:



- 2º Hallar los conjuntos cerrados
  - $C_a=\{a, c, e\}=C_c=C_e$
  - $C_f=\{f, d\}=C_d$
  - $C_g=\{g\}$
  - S
- 3º Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, d, e, f, g
  - Transitorios: b
  - Periódicos: a, c, e (todos de periodo 2)
  - Absorbentes: g

Ejemplos

- 4º Reorganizar Q. Cuando hay varios conjuntos cerrados e irreducibles de estados recurrentes (por ejemplo, n conjuntos), ponemos juntos los estados del mismo conjunto:

$$Q=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & P_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & P_3 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & \dots & P_n & 0 \\ \hdashline
Z_1 & Z_2 & Z_3 & & Z_n & Z
\end{array}\right)$$

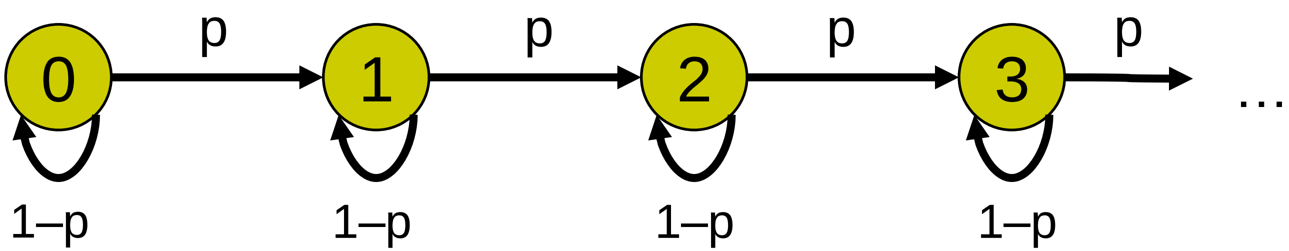
Ejemplos

En nuestro caso, reordenamos S={a, c, e, d, f, g, b} y obtenemos:

$$Q=\left(\begin{array}{ccc:cc:c:c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}2 \end{array}\right)$$

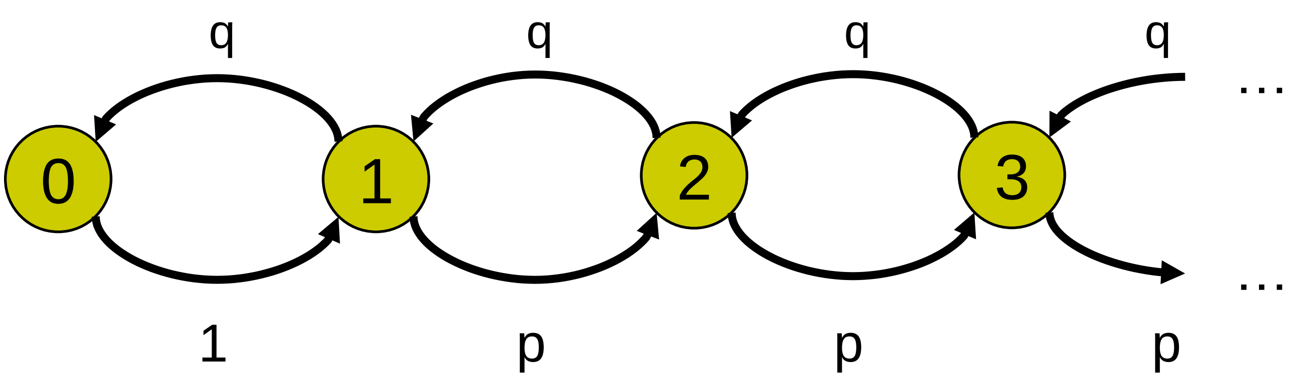
Ejemplos

- 5º Clasificar la cadena. No es irreducible, con lo cual no será periódica, ni aperiódica, ni recurrente, ni transitoria ni ergódica.
- **Ejemplo:** Número de éxitos al repetir indefinidamente una prueba de Bernouilli (probabilidad p de éxito). No es CM irreducible, porque por ejemplo $C_1=\{1, 2, 3, \ldots\}$ es cerrado. Todos los estados son transitorios.



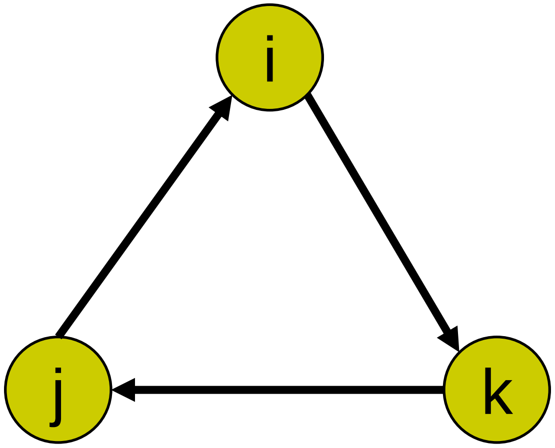
Ejemplos

- **Ejemplo:** *Recorrido aleatorio*. Es una CM irreducible y periódica de periodo 2. Se demuestra que si p≤q, todos los estados son recurrentes, y que si p>q, todos son transitorios.



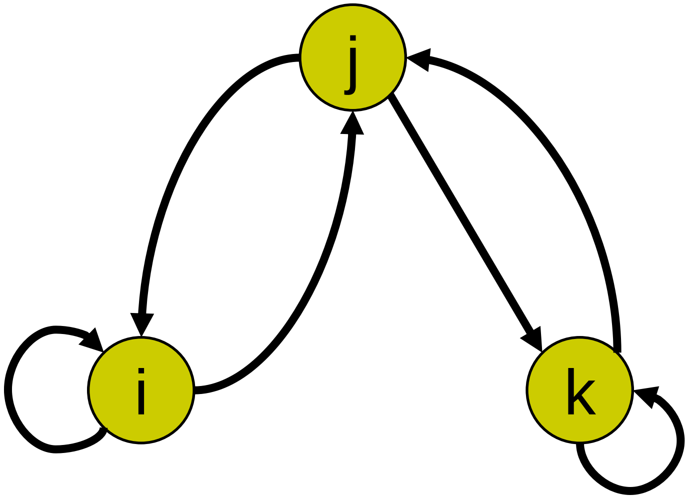
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, recurrente y periódica de periodo 3. No es ergódica.



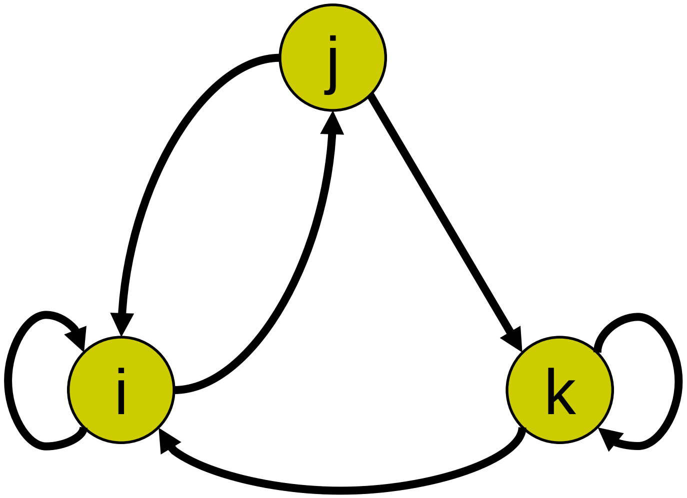
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica.



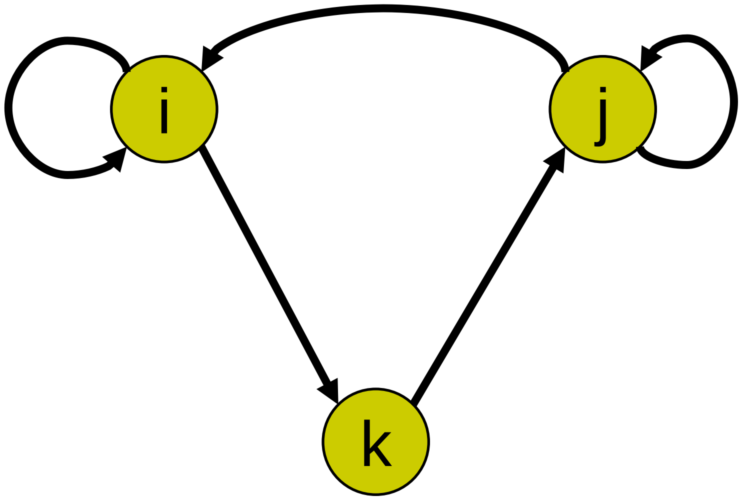
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica



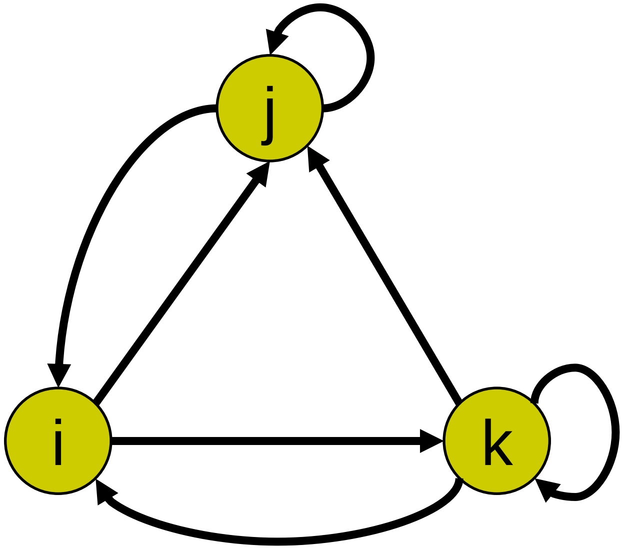
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica



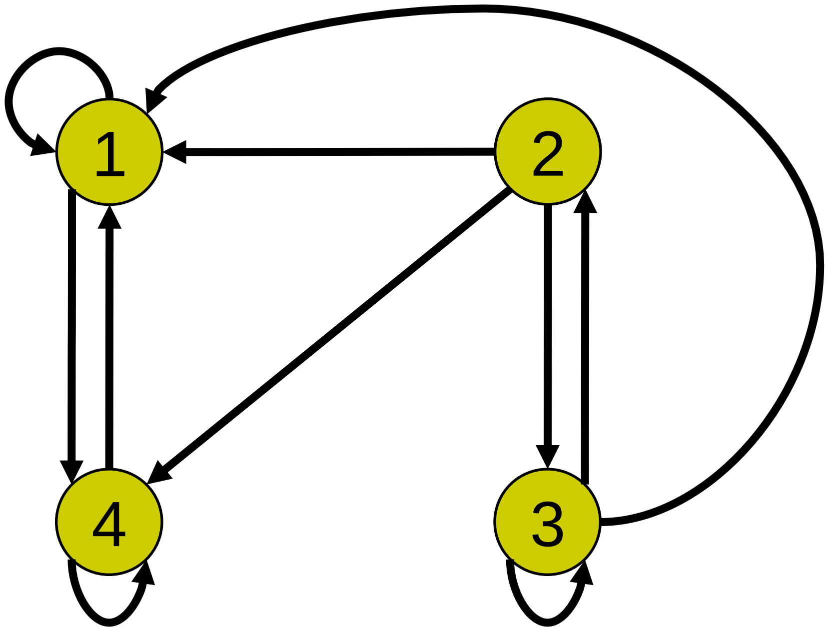
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica



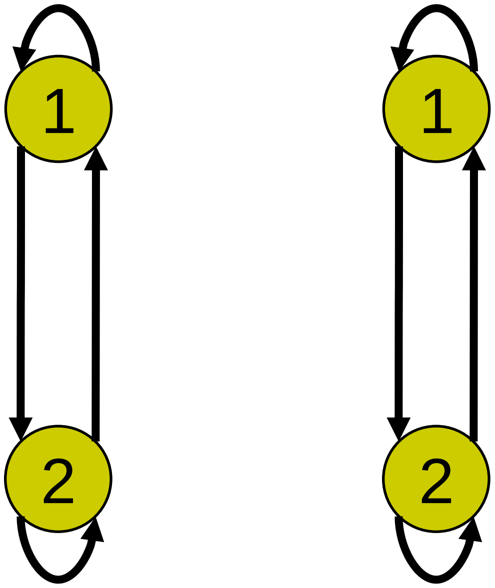
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. 1 y 4 son recurrentes; 2 y 3 son transitorios.



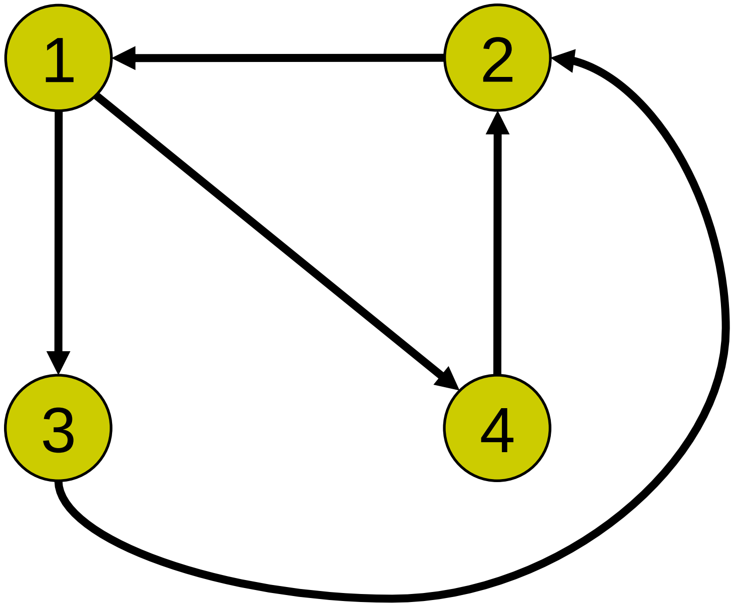
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Todos los estados son recurrentes y ninguno es periódico.



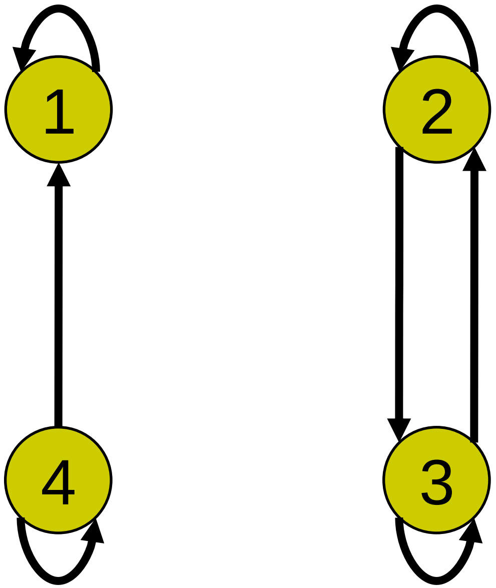
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, recurrente y periódica de periodo 3. No es ergódica.



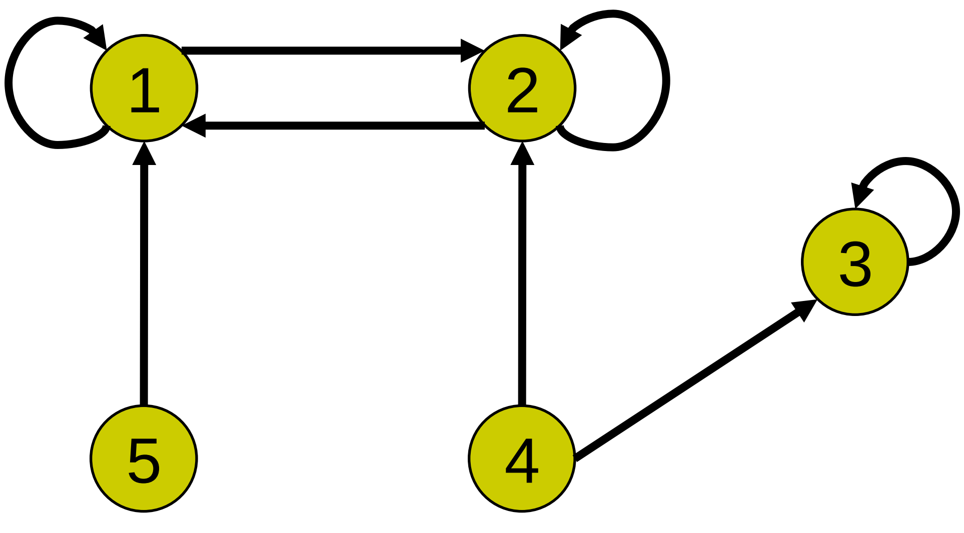
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Ningún estado es periódico. 4 es transitorio, y el resto recurrentes. 1 es absorbente.



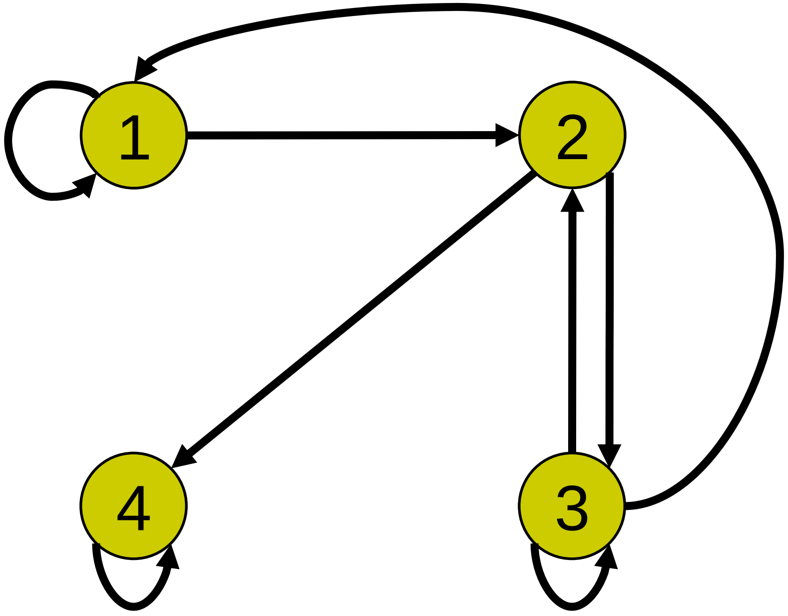
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Ningún estado es periódico. 4 y 5 son transitorios, y el resto recurrentes. 3 es absorbente.



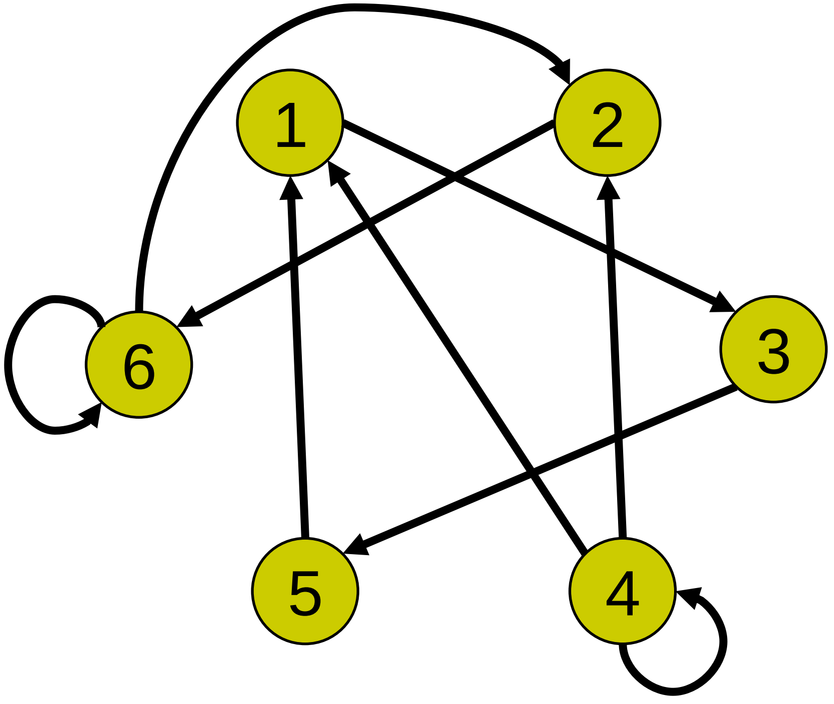
Ejemplos

- La siguiente CM es no es irreducible, y por tanto tampoco de ninguno de los demás tipos. 4 es absorbente, y el resto son transitorios.



Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. 1,3 y 5 son recurrentes de periodo 3. 2 y 6 son recurrentes, pero no periódicos. 4 es transitorio.



Cadenas absorbentes

Concepto de cadena absorbente

- Sea *X* una CM cuyos estados son todos transitorios o absorbentes. En tal caso diremos que *X* es absorbente.
- Si *X* es finita y absorbente, reordenamos S poniendo primero los estados transitorios y obtenemos:

$$Q = \left(\begin{array}{c:c} Q' & R \\ \hdashline 0 & I \end{array}\right)$$

Resultados sobre cadenas absorbentes

- **Proposición:** El número medio de etapas que se estará en el estado transitorio $j \in S$ antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el estado transitorio $i \in S$, viene dado por el elemento (i,j) de $(I-Q')^{-1}$
- **Nota:** La etapa inicial también se cuenta, es decir, en la diagonal de $(I-Q')^{-1}$ todos los elementos son siempre mayores o iguales que 1

Resultados sobre cadenas absorbentes

- **Proposición:** La probabilidad de ser absorbido por un estado absorbente $j \in S$, suponiendo que empezamos en el estado transitorio $i \in S$, viene dada por el elemento (i,j) de la matriz $(I-Q')^{-1}R$, que se denomina matriz fundamental de la CM

Ejemplo de CM absorbente

- En un juego participan dos jugadores, A y B. En cada turno, se lanza una moneda al aire. Si sale cara, A le da 1 € a B. Si sale cruz, B le da 1 € a A. Al principio, A tiene 3 € y B tiene 2 €. El juego continúa hasta que alguno de los dos se arruine. Calcular:
  - La probabilidad de que A termine arruinándose.
  - La probabilidad de que B termine arruinándose.
  - El número medio de tiradas que tarda en acabar el juego.

Ejemplo de CM absorbente

- Tendremos una CM con un estado por cada posible estado de cuentas de A: S={1, 2, 3, 4, 5, 0}. Descomponemos Q:

$$Q=\left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Q'=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de CM absorbente

- Realizamos los cálculos necesarios:

$$(I-Q')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,6 & 1,2 & 0,8 & 0,4 \\ 1,2 & 2,4 & 1,6 & 0,8 \\ 0,8 & 1,6 & 2,4 & 1,2 \\ 0,4 & 0,8 & 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$$

$$(I-Q')^{-1}R = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de CM absorbente

- Probabilidad de que A termine arruinándose.
  - La ruina de A está representada por el estado 0, que es el 2º estado absorbente. Como empezamos en el 3er estado transitorio (A empieza con 3 €), debemos consultar la 3ª fila, 2ª columna de $(I–Q')^{-1}R$, que nos da una probabilidad de 0,4 de que A empiece con 3 € y termine en la ruina.
- Probabilidad de que B termine arruinándose
  - Como es el suceso contrario del apartado a), su probabilidad será 1–0,4=0,6. También podríamos haber consultado la 3ª fila, 1ª columna de $(I–Q')^{-1}R$.

Ejemplo de CM absorbente

- Número medio de tiradas que tarda en acabar el juego
  - Sumamos los números medios de etapas que se estará en cualquier estado transitorio antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el 3er estado transitorio. Dichos números medios son los que forman la 3ª fila de la matriz $(I-Q')^{-1}$. El promedio es: 0,8+1,6+2,4+1,2=6 tiradas.
- Nota: si observamos la 1ª columna de $(I-Q')^{-1}R$, vemos que los valores van creciendo. Esto se debe a que, cuanto más dinero tenga al principio A, más probabilidad tiene de ganar el juego.

Distribución estacionaria

Concepto de distribución estacionaria

- **Teorema:** Sea *X* una CM irreducible, aperiódica y recurrente. Entonces,

$$\forall j \in S, \quad \exists p_j = \lim_{n\to\infty} q_{ij}^{(n)}$$

- Diremos que una CM alcanza la distribución estacionaria sii existen los límites del teorema anterior y además se cumple que:

$$\sum_{j\in S} p_j = 1$$

Existencia de la distribución estacionaria

- **Teorema:** Sea *X* finita y ergódica. Entonces la distribución estacionaria existe y viene dada por la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\forall j \in S, \quad p_j = \sum_{i \in S} p_i q_{ij}$$

$$\sum_{j \in S} p_j = 1$$

- Este teorema no sólo dice cuándo existe distribución estacionaria (en los casos finitos), sino que además nos dice cómo calcularla.

Nomenclatura para las ecuaciones

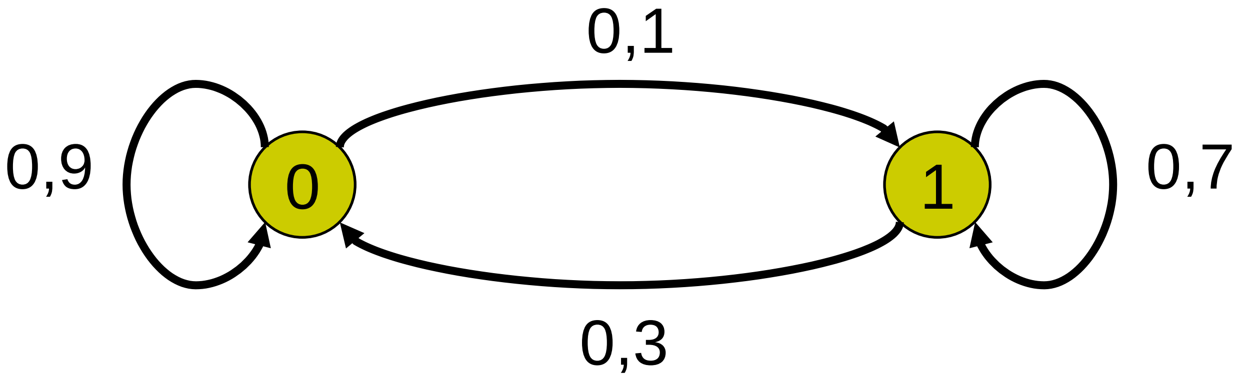
- A las primeras ecuaciones del teorema se les llama ecuaciones de equilibrio, porque expresan que lo que “sale” de j (izquierda) es igual a lo que “entra” en j (derecha):

$$\sum_{i \in S} p_j q_{ji} = \sum_{i \in S} p_i q_{ij}$$

- A la última ecuación se le llama ecuación normalizadora, ya que obliga a que el vector formado por los p_j esté normalizado (en la norma 1)

Ejemplos

- **Ejemplo:** Hallar la distribución estacionaria (si existe) del ejemplo de la línea telefónica.



- 1º Comprobar que la CM es finita y ergódica, para así saber que existe la distribución estacionaria. Lo es, con lo cual dicha distribución existe.

Ejemplos

- 2º Plantear las ecuaciones de equilibrio (una por nodo):

$$Nodo\,0: \quad p_0 = 0{,}9\,p_0 + 0{,}3\,p_1$$

$$Nodo\,1: \quad p_1 = 0{,}1\,p_0 + 0{,}7\,p_1$$

O lo que es más fácil,

$$\vec{p} = Q^T \vec{p}, \quad donde\ \vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

- 3º Plantear la ecuación normalizadora:

$$p_0 + p_1 = 1$$

Ejemplos

- 4º Resolver el sistema. Hay dos métodos:
  - Utilizar un algoritmo estándar de sistemas de ecuaciones lienales para resolver todas las ecuaciones conjuntamente, por ejemplo, Gauss. El sistema debe tener solución única. En nuestro caso,

$$p_0 = 0{,}75; \quad p_1 = 0{,}25$$

Ejemplos

- Encontrar una solución cualquiera de las ecuaciones de equilibrio. Para ello le daremos un valor no nulo a nuestra elección a una sola de las incógnitas. Una vez conseguida esa solución, la solución verdadera será un múltiplo de ella (usaremos la normalizadora). En nuestro caso, haciendo $p_1=1$,

$$p_0 = 0{,}9\, p_0 + 0{,}3 \Rightarrow p_0 = 3$$

La solución verdadera será de la forma $(3k,k)^T$. Aplicando la normalizadora,

$$3k + k = 1 \Rightarrow k = 0{,}25$$

Con lo cual la solución verdadera es $(0'75, 0'25)^T$

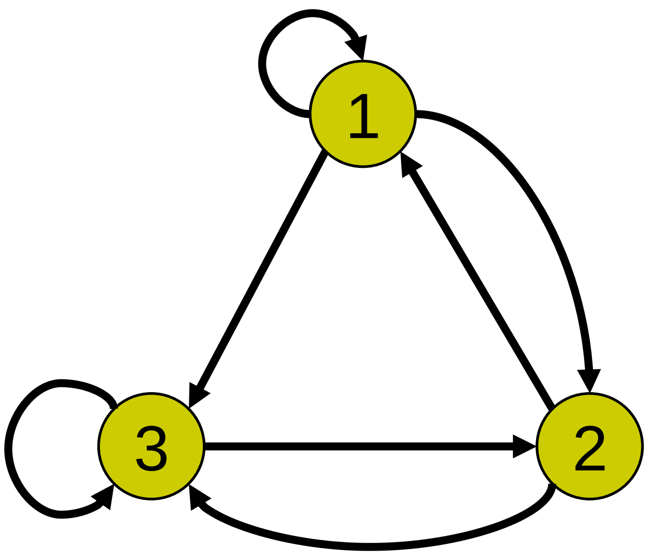
Ejemplos

- **Ejemplo:** Hallar, si existe, la distribución estacionaria para esta CM con S={1, 2, 3}:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

- 1º Dibujamos el DTE y así comprobamos más fácilmente que la CM es finita y ergódica:



Ejemplos

- 2º y 3º Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

- 4º Resolvemos. Para ello fijamos p_1=1 y hallamos una solución para las ecuaciones de equilibrio:

Ejemplos

$$1 = 0{,}3 + 0{,}6\,p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{0{,}7}{0{,}6}$$

$$\frac{0{,}7}{0{,}6} = 0{,}5 + 0{,}4\,p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{0{,}7 - 0{,}3}{0{,}6 \cdot 0{,}4} = \frac{1}{0{,}6}$$

Por tanto la solución verdadera será de la forma:

$$\left(k, \frac{0'7}{0'6}k, \frac{1}{0'6}k\right)^T = (0'6\lambda, 0'7\lambda, \lambda)^T$$

Normalizamos y obtenemos la solución verdadera:

$$0'6\lambda + 0'7\lambda + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2'3}$$

$$(0'6\lambda, 0'7\lambda, \lambda)^T = \left(\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}\right)^T$$

Ejemplos

- **Ejemplo:** Hallar la distribución estacionaria, si existe, en el ejemplo del *buffer*.
- 1º Ya vimos que la CM es finita y ergódica
- 2º y 3º Planteamos las ecuaciones de equilibrio nodo a nodo y expresándolas como "salidas"="entradas" (usar Q^T sería más difícil):

$$Nodo\ 0: \beta p_1 + \beta p_2 + \ldots + \beta p_M = \alpha(1-\beta)p_0$$

$$Nodo\ i\ (i \in \{1,2,\ldots,M-1\}): \alpha(1-\beta)p_{i-1} = \beta p_i + \alpha(1-\beta)p_i$$

$$Nodo\ M: \alpha(1-\beta)p_{M-1} = \beta p_M$$

Ejemplos

4º Podemos despejar p_i en la ecuación de cada nodo i, y así observamos que los p_i forman una progresión geométrica, cuya razón llamaremos γ:

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,M-1\},\ p_i = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta+\alpha(1-\beta)}\, p_{i-1} = \gamma p_{i-1}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{0,1,\ldots,M-1\},\ p_i = \gamma^i p_0$$

Ejemplos

Usando la suma de los M–1 primeros términos de una sucesión geométrica y la ecuación normalizadora, llegamos a la solución:

$$p_0 = \frac{\beta}{\beta + \alpha(1-\beta)}$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,M-1\},\ p_i = \gamma^i p_0$$

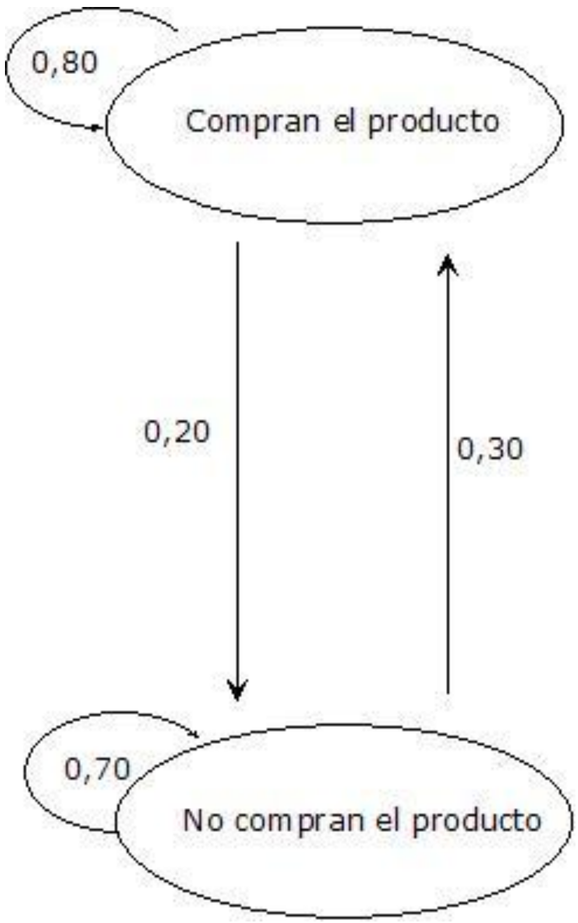
$$p_M = \frac{\alpha(1-\beta)\gamma^{M-1}}{\beta} p_0$$

Ejemplo #1

El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿ Y dentro de dos meses ?.

Para resolver este tipo de problemas, lo primero es hacer un esquema.

A la vista del esquema podemos pasar a construir la matriz de probabilidades de transición:



	0	1
0	0.80	0.20
1	0.30	0.70

Calculo

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Matriz inicial

$$(C,\ \mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 100 & 900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (350,650)$$

El primer mes comprarán 350 y no comprarán 650

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$$

$$(C,\ \mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 100 & 900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} = (475,525)$$

El segundo mes comprarán 475 y no comprarán 525

Ejemplo #2:

El clima en el pueblo de Centerville puede cambiar con rapidez de un día a otro. sin embargo, las posibilidades de tener clima seco (sin lluvia) mañana es de alguna forma mayor si hoy está seco, es decir, no llueve. En particular, la probabilidad de que mañana esté seco es de 0.8 si hoy está seco, pero es de sólo 0.6 si hoy llueve. Estas probabilidades no cambian si se considera la información acerca del clima en los días anteriores a hoy.

La evolución del clima día tras día en Centerville es un proceso estocástico. Si se comienza en algún día inicial, el clima se observa cada día t, para t=0,1,2,…El estado del sistema en el día t puede ser.

Estado 0 = El día t es seco. O

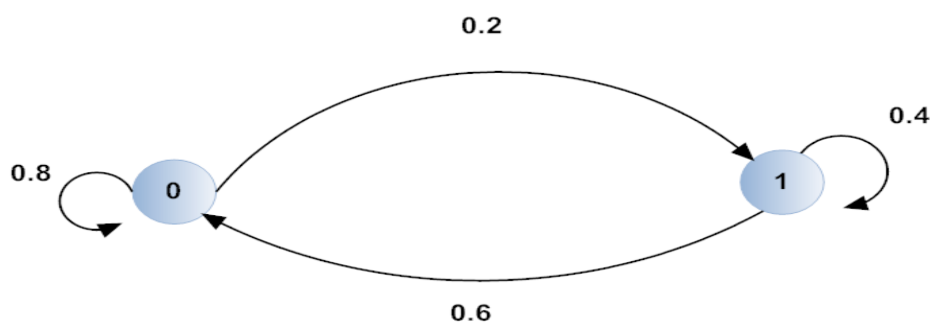
Estado 1= El día t es lluvioso

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz P contiene los estados posibles, del problema.
Debe leerse que la si hoy es un día seco la probabilidad que mañana sea seco es 0.8.
Si hoy es un seco, la probabilidad que mañana sea lluvioso es 0.2.
Si hoy es un día lluvioso, la probabilidad que mañana sea seco es 0.6.
Si hoy es un día lluvioso ,la probabilidad que mañana sea lluvioso es 0.4

$$X_t = \begin{cases} 0 \text{ si día t es seco} \\ 1 \text{ si día t es lluvioso} \end{cases}$$

El proceso estocástico $\{X_t\} = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$ proporciona una representación matemática de la forma como evoluciona el clima Centerville a través del tiempo.



Matrices de transición de estados en n pasos del clima:

La probabilidad del estado del clima dos, tres, cuatro, cinco días a futuro se puede conocer a partir de las matrices de transición de dos, tres, cuatro y cinco pasos que se calculan bajo las ecuaciones de Chapman Kolmogorov. Partiendo de la matriz de transición de un paso.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = P^{(1)} \bullet P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)} = P^{(1)} \bullet P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)} = P^{(1)} \bullet P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.749 & 0.251 \end{pmatrix}$$

$$P^{(5)} = P^{(1)} \bullet P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.749 & 0.251 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Observe que en la matriz de cinco pasos, las dos filas tienen elementos idénticos. Esto se denomina proba-bilidad del estado estable de la cadena de Markov.

Ejemplo #3:

Hay tres marcas nacionales de cerveza principales (B,M,S). Piense en el volumen total (en galones) que se consumieron el año pasado de estas tres cervezas. En la gráfica se muestra la proporción del total del mercado(o sea, la participación en el mercado) de cada marca.

Marca de cerveza	Participación en el mercado
B	0.3
M	0.5
S	0.2

Sharon Sheralik es la gerente de la fábrica que produce la cerveza B. Le gustaría recuperar su posición como fabricante de cerveza número 1 en la nación. Ella espera cambiar su posición en el mercado modificando su estrategia de mercado y el envase. Espera aumentar su participación en el extenso mercado cervecero, en tanto que conserva una ventaja entre los jóvenes solteros. Sabe que con una nueva campaña ganará y perderá clientes ante sus dos competidores. **Lo que Sharon necesita es una estimación del efecto global.**

Una cadena de Markov ofrece a Sharon un nuevo modelo para analizar este problema. Para usarlo, suponga que se puede describir el comportamiento de un consumidor individual mediante una cadena de Markov. Los estados del sistema son las marcas de cerveza que los consumidores podrían comprar. Una probabilidad de transición p_{ij} es la probabilidad de que un cliente que compra esta vez la marca i cambie a la marca j la próxima vez.

En la tabla siguiente se muestra la matriz de transición de un paso para este problema. Esta matriz indica que:1.- el 85% de la gente que compró B la última vez, la comprará otra vez; 2.- El 10% se aficionará a M;3.- el 5% comprará S. Las demás fila tienen una representación similar. La matriz de probabilidades estacionarias se puede calcular con las ecuaciones de Chapman Kolmogorov.

	B	M	S
B	0.85	0.10	0.05
M	0.08	0.85	0.07
S	0.13	0.17	0.70

$$P^{(1)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.737 & 0.1785 & 0.0845 \\ 0.1451 & 0.7424 & 0.1125 \\ 0.2151 & 0.2765 & 0.5084 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 0.737 & 0.1785 & 0.0845 \\ 0.1451 & 0.7424 & 0.1125 \\ 0.2151 & 0.2765 & 0.5084 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.651715 & 0.23979 & 0.108495 \\ 0.197352 & 0.664675 & 0.13797 \\ 0.2710469 & 0.34296 & 0.3859 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0.651715 & 0.23979 & 0.108495 \\ 0.197352 & 0.664675 & 0.13797 \\ 0.2710469 & 0.34296 & 0.3859 \end{bmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5872452999 & 0.2874371499 & 0.1253175499 \\ 0.2388596899 & 0.6081643600 & 0.1529759499 \\ 0.3080056899 & 0.3842415499 & 0.3077527599 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0.5872452999 & 0.2874371499 & 0.1253175499 \\ 0.2388596899 & 0.6081643600 & 0.1529759499 \\ 0.3080056899 & 0.3842415499 & 0.3077527599 \end{bmatrix}$$

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.5384447583 & 0.3243500909 & 0.1372051503 \\ 0.2715707587 & 0.5668315864 & 0.1615976545 \\ 0.3325520191 & 0.4097238556 & 0.2577241248 \end{bmatrix}$$

$$P^{(6)}= \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0.5384447583 & 0.3243500909 & 0.1372051503 \\ 0.2715707587 & 0.5668315864 & 0.1615976545 \\ 0.3325520191 & 0.4097238556 & 0.2577241248 \end{bmatrix}$$

$$P^{(6)}= \begin{bmatrix} 0.5014627213 & 0.3528669286 & 0.1456703494 \\ 0.2971893668 & 0.5364355256 & 0.1663751070 \\ 0.3489512609 & 0.4253335804 & 0.2257151581 \end{bmatrix}$$

$$P^{(7)}= \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0.5014627213 & 0.3528669286 & 0.1456703494 \\ 0.2971893668 & 0.5364355256 & 0.1663751070 \\ 0.3489512609 & 0.4253335804 & 0.2257151581 \end{bmatrix}$$

$$P^{(7)}= \begin{bmatrix} 0.4734098128 & 0.3748471208 & 0.1517430655 \\ 0.3171545677 & 0.5139729016 & 0.1688725299 \\ 0.3599782287 & 0.4348002463 & 0.2052215242 \end{bmatrix}$$

$$P^{(8)}=\begin{bmatrix}0.85 & 0.1 & 0.05\\0.08 & 0.85 & 0.07\\0.13 & 0.17 & 0.7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.4734098128 & 0.3748471208 & 0.1517430655\\0.3171545677 & 0.5139729016 & 0.1688725299\\0.3599782287 & 0.4348002463 & 0.2052215242\end{bmatrix}$$

$$P^{(8)}=\begin{bmatrix}0.4521127090 & 0.3917573551 & 0.1561299348\\0.3326526435 & 0.4973007532 & 0.1700466023\\0.3674443122 & 0.4404656913 & 0.1920899955\end{bmatrix}$$

$$P^{(9)}=\begin{bmatrix}0.85 & 0.1 & 0.05\\0.08 & 0.85 & 0.07\\0.13 & 0.17 & 0.7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.4521127090 & 0.3917573551 & 0.1561299348\\0.3326526435 & 0.4973007532 & 0.1700466023\\0.3674443122 & 0.4404656913 & 0.1920899955\end{bmatrix}$$

$$P^{(9)}=\begin{bmatrix}0.4359332826 & 0.4047471117 & 0.1593196045\\0.3446448655 & 0.4848788270 & 0.1704763064\\0.3725366201 & 0.4437955681 & 0.1836678107\end{bmatrix}$$

$$P^{(10)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 0.4359332826 & 0.4047471117 & 0.1593196045 \\ 0.3446448655 & 0.4848788270 & 0.1704763064 \\ 0.3725366201 & 0.4437955681 & 0.1836678107 \end{bmatrix}$$

$$P^{(10)}=\begin{bmatrix} 0.4236346077 & 0.4147127060 & 0.1616526849 \\ 0.3539003616 & 0.4755924616 & 0.1705071755 \\ 0.3760365879 & 0.4457034227 & 0.1782599881 \end{bmatrix}$$

$$P^{(11)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 0.4236346077 & 0.4147127060 & 0.1616526849 \\ 0.3539003616 & 0.4755924616 & 0.1705071755 \\ 0.3760365879 & 0.4457034227 & 0.1782599881 \end{bmatrix}$$

$$P^{(11)}=\begin{bmatrix} 0.4142812820 & 0.4223502173 & 0.1633684991 \\ 0.3610286371 & 0.4686298484 & 0.1703415131 \\ 0.3784611720 & 0.4467557661 & 0.1747830605 \end{bmatrix}$$

$$P^{(12)} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4142812820 & 0.4223502173 & 0.1633684991 \\ 0.3610286371 & 0.4686298484 & 0.1703415131 \\ 0.3784611720 & 0.4467557661 & 0.1747830605 \end{bmatrix}$$

$$P^{(12)} = \begin{bmatrix} 0.4071650120 & 0.4281984578 & 0.1646365285 \\ 0.3665091261 & 0.4633962921 & 0.1700945802 \\ 0.3801542553 & 0.4473016387 & 0.1725441044 \end{bmatrix}$$

$$P^{(13)} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4071650120 & 0.4281984578 & 0.1646365285 \\ 0.3665091261 & 0.4633962921 & 0.1700945802 \\ 0.3801542553 & 0.4473016387 & 0.1725441044 \end{bmatrix}$$

$$P^{(13)} = \begin{bmatrix} 0.4017488855 & 0.4326734002 & 0.1655777124 \\ 0.3707167560 & 0.4594538396 & 0.1698294027 \\ 0.3813459817 & 0.4475543162 & 0.1710997004 \end{bmatrix}$$

$$P^{(14)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0.4017488855 & 0.4326734002 & 0.1655777124 \\ 0.3707167560 & 0.4594538396 & 0.1698294027 \\ 0.3813459817 & 0.4475543162 & 0.1710997004 \end{bmatrix}$$

$$P^{(14)}=\begin{bmatrix} 0.3976255273 & 0.4360954899 & 0.1662789808 \\ 0.3739433721 & 0.4564784378 & 0.1695781883 \\ 0.3821913908 & 0.4476427160 & 0.1701658913 \end{bmatrix}$$

$$P^{(15)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0.3976255273 & 0.4360954899 & 0.1662789808 \\ 0.3739433721 & 0.4564784378 & 0.1695781883 \\ 0.3821913908 & 0.4476427160 & 0.1701658913 \end{bmatrix}$$

$$P^{(15)}=\begin{bmatrix} 0.3944856049 & 0.4387111459 & 0.1668032470 \\ 0.3764153058 & 0.4542293014 & 0.1693553909 \\ 0.3827956653 & 0.4476436493 & 0.1695606834 \end{bmatrix}$$

$$P^{(16)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3944856049 & 0.4387111459 & 0.1668032470 \\ 0.3764153058 & 0.4542293014 & 0.1693553909 \\ 0.3827956653 & 0.4476436493 & 0.1695606834 \end{bmatrix}$$

$$P^{(16)}=\begin{bmatrix} 0.3920940780 & 0.4407095866 & 0.1671963332 \\ 0.3783075548 & 0.4525268533 & 0.1691655898 \\ 0.3832306963 & 0.4476019847 & 0.1691673169 \end{bmatrix}$$

$$P^{(17)}=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.3920940780 & 0.4407095866 & 0.1671963332 \\ 0.3783075548 & 0.4525268533 & 0.1691655898 \\ 0.3832306963 & 0.4476019847 & 0.1691673169 \end{bmatrix}$$

$$P^{(17)}=\begin{bmatrix} 0.3902722565 & 0.4422359331 & 0.1674918080 \\ 0.3797550965 & 0.4512367311 & 0.1690081701 \\ 0.3835460018 & 0.4475432006 & 0.1689107954 \end{bmatrix}$$

$$P^{(25)} = \begin{bmatrix} 0.384437 & 0.447154 & 0.1684 \\ 0.384437 & 0.447154 & 0.1684 \\ 0.384437 & 0.447154 & 0.1684 \end{bmatrix}$$

Observe que en la matriz de veinte y cinco pasos, las tres filas tienen elementos idénticos. Esto se denomina probabilidad del estado estable de la cadena de Markov o Matriz estacionaria

Esto implica que la ventaja en el mercado de B aumentará al nuevo nivel de 0.38. Sea ha acercado a su competidor más fuerte, de un 20% a pasado a un 7% de diferencia. De hecho esto depende de que la matriz de transición sea una buena representación de cómo reaccionarán los clientes ante la nueva campaña promocional.

Solución por medio programación lineal:

$$(B \quad M \quad S) = (B \quad M \quad S)\begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 & 0.05 \\ 0.08 & 0.85 & 0.07 \\ 0.13 & 0.17 & 0.70 \end{pmatrix}$$

$(B \quad M \quad S) =$ [0.85·B + 0.08·M + 0.13·S, 0.1·B + 0.85·M + 0.17·S, 0.05·B + 0.07·M + 0.7·S]

B = 0.85B + 0.08M + 0.13S
M = 0.1B + 0.85M + 0.17S
S = 0.05B + 0.07M + 0.7S

PPL:
Función objetivo Max B
Sujeto a:
0.15B – 0.08M -0.13S=0
-0.1B + 0.15M – 0.17S=0
-0.05B – 0.07M + 0.3S=0
B + M + S =1
B>0
M>0
S>0

Combined Report for MARKOV

16:43:24	Friday	June	06	2008	

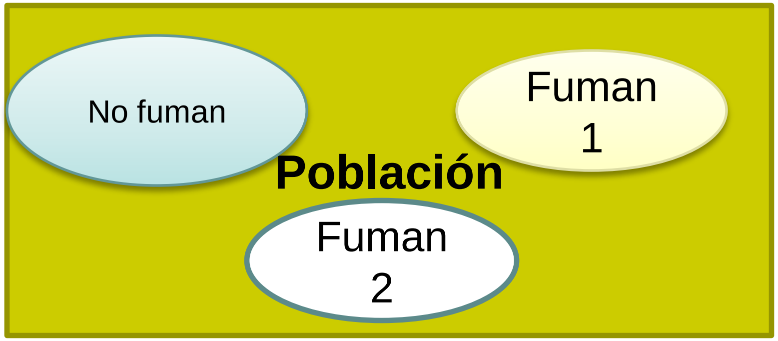
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
B	**0.3844**	1.0000	0.3844	0	basic	0	M
M	**0.4472**	0	0	0	basic	-M	0.1786
S	**0.1684**	0	0	0	basic	-0.2174	18.5000

Objective Function (Max.) = 0.3844

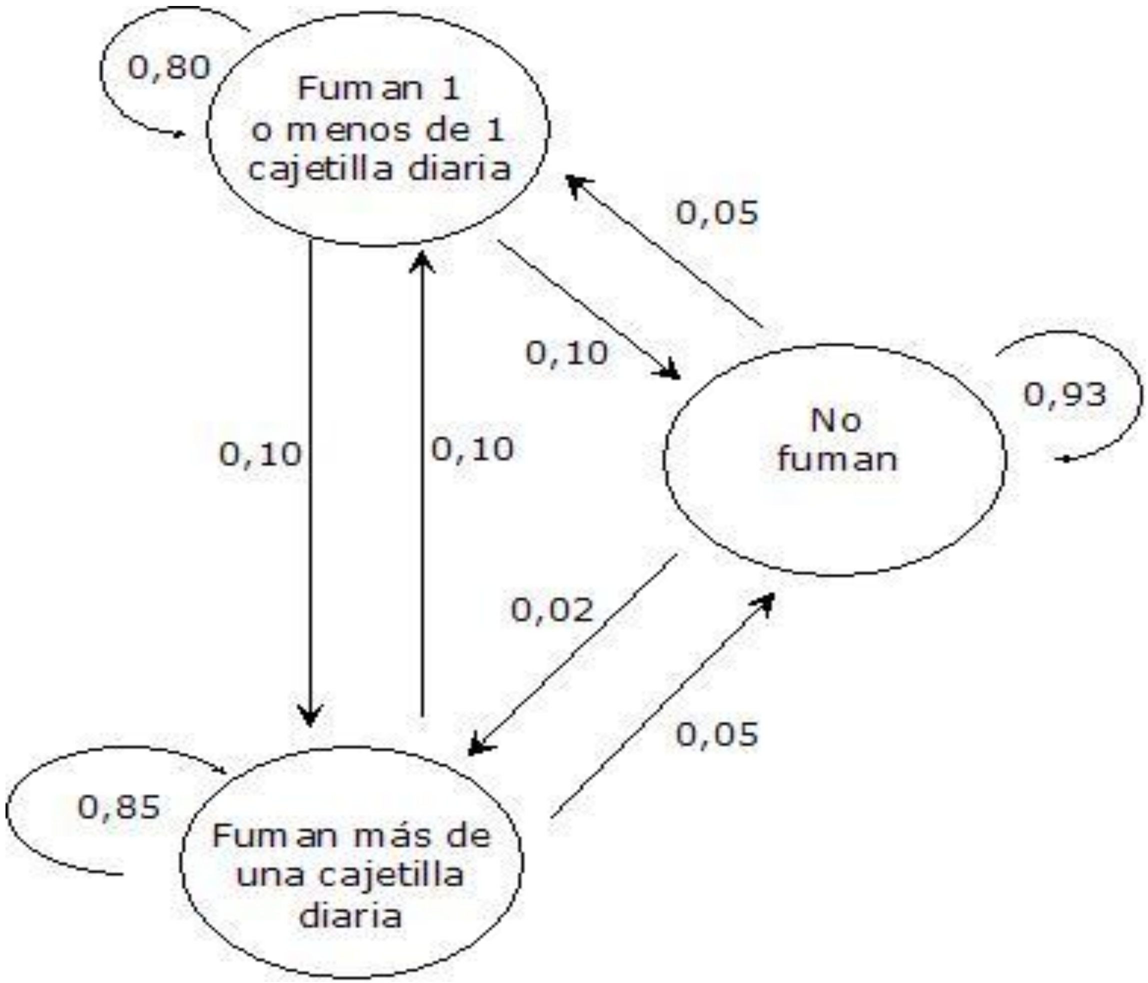
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	0.0000	=	0	0	4.2973	0	0.1100
C2	0.0000	=	0	0	0	0	M
C3	0.0000	=	0	0	0.5807	0	0.1375
C4	1.0000	=	1.0000	0	0.3844	0	M

Ejemplo #4

En una población de 10,000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5% de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario, o menos, y un 2% de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete, o menos, hay un 10% de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10% de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5% de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10% de que pasen a fumar un paquete, o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes? ¿Y dentro de dos meses?



Ejemplo 4


0,80
Fuman 1
o menos de 1
cajetilla diaria
0,05
0,10
No
fuman
0,93
0,10
0,10
0,02
0,05
0,85
Fuman más de
una cajetilla
diaria

Ejemplo 4

$P^{(1)} =$

	0	1	2
0	0.93	0.05	0.02
1	0.10	0.80	0.10
2	0.05	0.10	0.85

$$(NF, FC, \mathrm{FCC}) = (5000\ 2500\ 2500)\begin{pmatrix} 0.93 & 0.05 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} = (5025{,}2500{,}2475)$$

Después de un mes habrán NF=5025, FC=2500, FCC=2475

$$(NF, FC, \mathrm{FCC}) = (5000\ 2500\ 2500)\begin{pmatrix} 0.8709 & 0.0885 & 0.0406 \\ 0.178 & 0.655 & 0.167 \\ 0.099 & 0.1675 & 0.7335 \end{pmatrix} = (5047{,}2498.75{,}2454.25)$$

Después de dos mes habrán NF=5047, FC=2499, FCC=2455

Ejemplo 4

$$P^{(1)} =$$

	0	1	2
0	0.93	0.05	0.02
1	0.10	0.80	0.10
2	0.05	0.10	0.85

$$(N,F,\mathrm{M})=(N,F,M)\begin{pmatrix} 0.93 & 0.05 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}=(5025{,}2500{,}2475)$$

[n,f,m]=[0.1·f + 0.05·m + 0.93·n, 0.8·f + 0.1·m + 0.05·n, 0.1·f + 0.85·m + 0.02·n]

$$\begin{cases} -0.1f-0.05m+0.07n=0 \\ 0.2f-0.1m-0.05n=0 \\ -0.1f+0.15m-0.02n=0 \\ f+m+n=1 \end{cases}$$

¿Qué pasaría si hubiésemos partido de otra matriz de estado ?
Supongamos que al comienzo del estudio partimos con:10.000 personas

- 4,000 no fumadores
- 3,500 fuman 1 paquete, o menos, diario
- 2,500 fuman más de un paquete diario.

En este caso la matriz de probabilidades de transición no cambia, sólo tenemos que modificar **X**. **Por lo tanto la situación a la que tiende este tipo de problemas es independiente de la matriz de estado inicial.**

Problema #5:

La cervecería más importante de la costa este (con etiqueta A) ha contratado a un analista de IO para analizar su posición en el mercado. En especial, la empresa está preocupada por las actividades de su mayor competidor (con etiqueta B). El analista piensa que el cambio de marca se puede modelar como una cadena de Markov que incluya tres estados: Los estados A y B representan a los clientes que beben cerveza que producen las mencionadas cervecerías y el estado C representa todas las demás marcas. Los datos se toman cada mes y el analista construye la siguiente matriz de transición (de un paso) con datos históricos.

	A	B	C
A	0.70	0.20	0.10
B	0.20	0.75	0.05
C	0.10	0.10	0.80

Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable de las dos cervecerías grandes?

Solución:(usar IOtutor o WinQSB, para obtener la matriz estable)

$P^{(21)}=$

	A	B	C
A	0.346	0.385	0.269
B	0.346	0.385	0.269
C	0.346	0.385	0.269